线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定理 (解空间大小)

$$\dim(V) = n - \operatorname{rank}(A).$$

给定矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 通过 $\mathcal{A}(\vec{x}) := A\vec{x}$, 我们可定义一个线性映射

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m.$$

性质

线性映射 $\mathcal{A}$ 的核正好为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间. 即

$$\ker \mathcal{A} = \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = 0\}.$$

此外, 我们还有

性质

- 线性映射 $\mathcal{A}$ 的像由 A 的全体列向量生成;
- $\dim(\ker \mathcal{A}) + \dim(\mathrm{im}\mathcal{A}) = n.$

非齐次线性方程组的解空间

如何描述非齐次线性方程组的解空间?

$$W := \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = b\}$$

W 和 V 有什么联系?
基本事实:

- $\forall \alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in V$.
- $\forall \alpha \in W, \gamma \in V \Rightarrow \alpha + \gamma \in W$.

定理

若 W 非空, 任取 $\gamma_0 \in W$, 记 $\gamma_0 + V := \{\gamma_0 + \alpha \mid \alpha \in V\}$. 则

$$W = \gamma_0 + V.$$

一般线性空间

n 维数组空间 = 赋予了加法和数乘运算的 n 维数组向量组成的集合.

$$
\begin{tikzcd}
\text{加法, 数乘} \arrow[r] & \text{线性组合} \arrow[r] & \text{线性相关 (无关), 等价} \arrow[d] \\
& \text{秩, 基, 维数} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \text{极大无关组} \arrow[l] \\
\text{坐标} & \text{过渡矩阵} & \text{扩充基}
\end{tikzcd}
$$

问题: 能否赋予其他集合 “+” 和 “·”, 使得其满足类似的性质和结构?

一般线性空间定义

设 V 为一个非空集. $\mathbb{F}$ 为一个数域. 若 V 上存在两个运算

1. 加法: 任意 V 中的有序对 (α, β), 存在唯一的 $\gamma \in V$ 与之对应. 记为 $\alpha + \beta$. 即, $V \times V \to V \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$.
2. 数乘: 任意 $\lambda \in \mathbb{F}$, 任意 $\alpha \in V$, 存在唯一的 $\gamma \in V$ 与之对应. 记为 $\lambda\alpha$. 即, $\mathbb{F} \times V \to V \quad (\lambda, \alpha) \mapsto \lambda\alpha$.

满足如下规律 (八大公理):

1. A1): $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\forall \alpha, \beta)$;
2. A2): $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma)$;
3. A3): $\exists \theta \in V \quad s.t. \quad \alpha + \theta = \alpha = \theta + \alpha, \quad (\forall \alpha)$, 这个 θ 也常记为 0;
4. A4): $\forall \alpha \quad \exists \beta \in V \quad s.t. \quad \alpha + (\beta) = \theta = (\beta) + \alpha$, 称 β 为 α 的负元记为 $-\alpha$, 定义减法为: $\gamma - \alpha = \gamma + (-\alpha)$;
5. D1): $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha, \quad (\forall \lambda, \mu, \alpha)$;
6. D2): $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta, \quad (\forall \lambda, \alpha, \beta)$;
7. M1): $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha, \quad (\forall \lambda, \mu, \alpha)$;
8. M2): $1\alpha = \alpha, \quad (\forall \alpha)$;

则称 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. V 中的元素称为向量.

性质 (一种判定方法)

设集合 V 上带有两个运算

$$\oplus: V \times V \to V \qquad \text{和} \qquad \odot: \mathbb{F} \times V \to V.$$

若存在正整数 n 和一个双射

$$\varphi: V \to \mathbb{F}^n$$

满足以下两条

1. $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad (\forall a, b \in V)$;
2. $\varphi(\lambda \odot a) = \lambda\varphi(a) \quad (\forall a \in V), \forall \lambda \in \mathbb{F}$,

则 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.

性质

1. 零向量 θ 唯一;
2. 负向量唯一;
3. $0\alpha = \theta$, $(-1)\alpha = -\alpha$, $\lambda\theta = \theta$;
4. $\lambda\alpha = \theta \Rightarrow \lambda = 0$ 或 $\alpha = \theta$.

例

1. $\mathbb{F}^n$;
2. E_n: n 元线性方程全体;
3. $\mathbb{F}_n[x]$: $\mathbb{F}$ 上次数不超过 n 的多项式全体;
4. $\mathbb{F}^{m\times n}$;
5. $\mathbb{F}=\mathbb{R}, V=\mathbb{C}$;
6. $\mathbb{F}=\mathbb{R}, V:=\mathbb{R}^+:=\{r\in\mathbb{R}\mid r\geq 0\}, r_1\oplus r_2:=r_1r_2, \lambda\circ\alpha:=\alpha^\lambda$.
7. $C_n:=\{a_0+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+\cdots+a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\mid a_i,b_i\in\mathbb{F}\}$;
8. $C[a,b]$ 区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体;

例 (反例)

1. $\mathbb{F}=\mathbb{R}, V=\mathbb{R}^+$, 通常 $+\times$
2. $\mathbb{F}=\mathbb{R}, v_0\in\mathbb{F}^n, V:=\{v\in\mathbb{F}^n \mid v\nparallel v_0\}$, 通常 $+\times$;
3. $\mathbb{F}=\mathbb{C}, V=\mathbb{R}_n[x]$ 通常 $+\times$;

注: 一般线性空间没有长度和夹角等几何概念.

定义

设 V 为 $\mathbb{F}$-线性空间, W 为 V 的非空子集, 若

1. 任取 $\alpha, \beta \in W$, 都有 $\alpha + \beta \in W$;
2. 任取 $\alpha \in W$ 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$, 都有 $\lambda\alpha \in W$.

则称 W 为 V 的子空间.

例

1. 平凡子空间: $W = \{0\}$ 或者 $W = V$.
2. 生成子空间: 任意子集 $S \subseteq V$,
   $\langle S \rangle := \{\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in S\}$.
3. $\mathbb{F}_n[x], C_n \subset C[a, b]$
4. $W = \{P \in \mathbb{F}_n[x] \mid P(x) = P(-x)\} \subset \mathbb{F}_n[x]$;
5. 任意 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $W := \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid AX = 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$.

数组向量空间上的概念以及性质推广到一般线性空间

前面关于数组空间的绝大部分结论都可以平行的推广到一般线性空间上 (只需要, 证明过程中只涉及加法和数乘).

$$
\begin{tikzcd}
\text{加法, 数乘} \arrow[r] & \text{线性组合} \arrow[r] & \text{线性相关 (无关), 等价} \arrow[d] \\
& \text{秩, 基, 维数} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \text{极大无关组} \arrow[l] \\
\text{坐标} & \text{过渡矩阵} & \text{扩充基}
\end{tikzcd}
$$

线性相关性

定理 (线性相关等价刻画)

给定向量空间 v 上的一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. 则以下几条相互等价:

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关. 即, 存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得 $\Sigma_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i = \theta$.
2. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 以及 $\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ 使得 $\alpha_i = \Sigma_{j \neq i} \lambda_i \alpha_i$.
3. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $\alpha_i \in \langle \mu_1, \cdots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_m \rangle$.
4. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \rangle = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m \rangle$.

注: 这时候没有与 "$AX = 0$ 有非零解" 的等价形式.

定理

若 $S_1 \subseteq S \subseteq V$, 则

1. S_1 线性相关 $\Rightarrow S$ 线性相关;
2. S 线性无关 $\Rightarrow S_1$ 线性无关;

极大无关组

定义 (极大线性无关组)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为向量空间 v 上的一组向量. 若

- 子向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, 且
- 任加另一个向量 $\alpha_{i_{r+1}}$ 后, 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{r+1}}$ 线性相关,

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大无关组.

定理

若 $S_1 \subseteq S \subseteq V$, 则以下几条等价:

1. S_1 为 S 的极大无关组;
2. $\begin{cases} S_1 \text{ 线性无关}, \\ S \text{ 可由 } S_1 \text{ 线性表示} \end{cases}$
3. $\begin{cases} S_1 \text{ 线性无关}, \\ S \text{ 与 } S_1 \text{ 等价} \end{cases}$
4. $\begin{cases} S_1 \text{ 线性无关}, \\ \langle S \rangle = \langle S_1 \rangle \end{cases}$

向量组的等价与秩

定义 (向量组等价)

两个向量组称为等价, 若它们可以相互线性表示.

定理

两个等价线性无关的向量组个数相同.

定义 (秩)

一个向量组的秩定义为其某个极大无关组中向量的个数.

定理

设 $S, T \subseteq V$. 则

1. S 线性无关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(S) = \#S$;
2. S 线性相关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(S) < \#S$;
3. T 可由 S 线性表示 $\Rightarrow \operatorname{rank}(T) \leq \operatorname{rank}(S)$;
4. $S \sim T \Leftrightarrow \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(S)$;
5. T 可由 S 线性表示且 T 的线性无关 $\Rightarrow \#T \leq \#S$.

定义

1. 设 V 为线性空间. 若 $S \subseteq V$ 线性无关, 且 $V = \langle S \rangle$, 则称 S 为 V 的一组基.
2. 设 S 为一组基. 若 S 为有限集, 则称 V 为有限维空间, 否则称之为无限维线性空间. 称 S 的个数为 V 的维数, 记作 $\dim_{\mathbb{F}} V$.
3. 若 $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 为 V 的一组基, 则对任意 $\alpha \in V$, 存在唯一的 n 维数组向量 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^n$ 使得 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$. 称向量 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 α 在 S 下的坐标.

定理

1. n 维空间中的任意 $n+1$ 个向量线性相关.
2. n 维空间中的任意 n 个线性无关的向量组为一组基.
3. n 维空间中的任意线性无关的向量组可扩充为一组基.

例

$\{1, \cos\theta, \sin\theta, \cos(2\theta), \sin(2\theta)\}$ 为 $\{1, \cos\theta, \sin\theta, \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2\theta), \sin(2\theta)\}$ 的一个极大无关组.

例

设 $T \subseteq S \subseteq V$. 则

$$\mathrm{rank}(S) - \mathrm{rank}(T) \leq \#S - \#T.$$

证明: 设 S_1 为 S 的极大无关组, 则 $S_1 \cap T$ 线性无关. 因此

$\mathrm{rank}(T) \geq \mathrm{rank}(S_1 \cap T) = \#S_1 + \#T - \#(S_1 \cup T) \geq \mathrm{rank}(S) + \#T - \#S.$

例

1. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$; $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x] = \infty$; $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{m\times n} = mn$.
2. 记 $W = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f(x) \leq n, f(2) = 0\}$. 则 W 是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间. 则 W 有一组基______________.

例

求线性空间 $\mathbb{F}_{n-1}[x]$ 从基 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 到基 $\{1,x+1,\cdots,(x+1)^{n-1}\}$ 的过渡矩阵.

例

矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 构成线性空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基. 这组基到 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的自然基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 的过渡矩阵为____________.

如何从已有的子空间构造新的子空间? 子空间的交还是子空间.

定理

设 $W_i (i \in I)$ 为 V 的子空间, 则 $\cap_{i \in I} W_i$ 也为 V 的子空间. 特别地, 设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则 $W_1 \cap W_2$ 也为 V 的子空间.